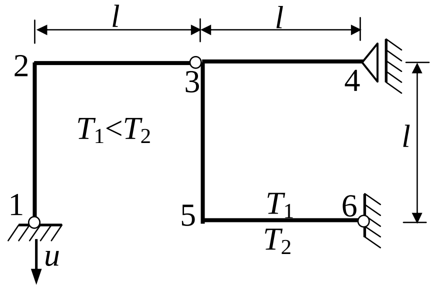


Rys. 3.14a

Obliczenia należy wykonać dla materiału:

a) **liniowo-sprężystego** $\sigma = E \cdot \varepsilon$

b) **nieliniowo-sprężystego** $\sigma = A \cdot \varepsilon^N$

c) **liniowo-lepkosprężystego** $\sigma = R * d\varepsilon$

Wyniki obliczeń należy ze sobą porównać.

Dane: l – długość pręta, T_1 – temperatura niższa, T_2 – temperatura wyższa, α_T – współczynnik rozszerzalności cieplnej, $E,N,R(t)$, A – współczynnik i funkcje charakteryzujące właściwości mechaniczne w podanym układzie różnych materiałów.

Rozwiązanie:

W podanym zadaniu siły przekrojowe i siłę hiperstatyczną wyznaczamy korzystając z całki Mohra, która w postaci niezmienniczej przyjmuje formę zależności

$$\delta = \int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds$$

gdzie δ jest przemieszczeniem w układzie wywołanym osiadaniem podpory oraz przyrostem temperatury.

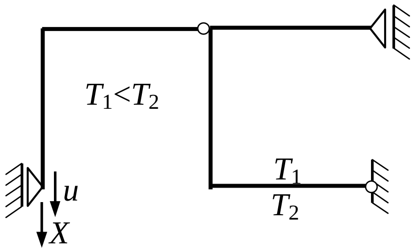
Zgodnie z warunkiem nierozdzielności przemieszczenie punktu 1 układu wynosi

$$u_0 = \int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds$$

gdzie (κ_M, κ_T) są zmianami krzywizn wywołanymi odpowiednio przez stan naprężeń i przyrost temperatury, a $(\varepsilon_M, \varepsilon_T)$ są wydłużeniami wywołanymi przez pole naprężeń i średnią wartość temperatury w przekroju.

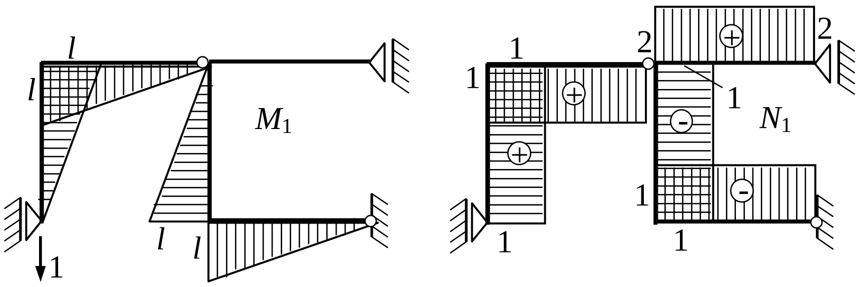
Występujące w całce Mohra funkcje M_1 i N_1 są momentami zginającymi i siłami osiowymi w analizowanym układzie prętowym, które wywołane są działaniem siły jednostkowej przyłożonej w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia, czyli w punkcie 1.

Przedstawione zadanie jest równoważne następującemu zadaniu statycznie wyznaczalnemu, w którym siła hiperstatyczna X musi być tak dobrana by jej łączne działanie wraz polem temperatur wywoływało przemieszczenie δ równe wymuszonemu przemieszczeniu podpory u_0 czyli spełniony musi być warunek nierozdzielności $u_0 = \delta$.



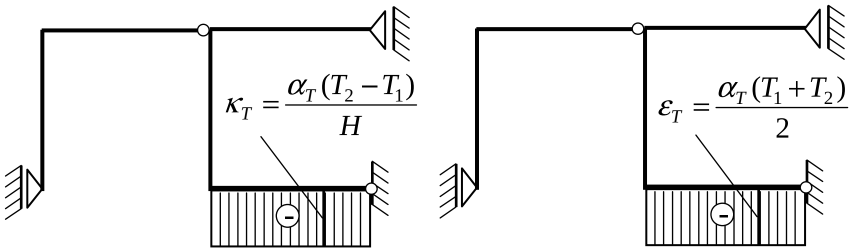
Rys. 3.14b

W wyrażeniu tym δ przyjmuje różne wartości w zależności od rodzaju analizowanego materiału. Wspólną dla wszystkich rozważanych przypadków częścią obliczeń niezależnie od opisu materiału są funkcje M_1 i N_1 (momentów i sił osiowych od siły jednostkowej), których wykresy mają postać



Rys. 3.14c

Wspólną część dla poszczególnych zadań stanowią takie wyrażenia na zmiany krzywizn i wydłużenia spowodowane wpływami termicznymi.



Rys. 3.14d

a) **Materiał liniowo-sprężysty**

Materiał liniowo-sprężysty opisany jest równaniem fizycznym postaci $\sigma = E \cdot \varepsilon$, co prowadzi do następujących wyrażeń na krzywiznę κ_M i wydłużenie ε_M.

$$\kappa_M = \frac{M}{EJ}, \quad \varepsilon_M = \frac{N}{EF}$$

gdzie: M jest funkcją momentów zginających wywołanych działaniem wszystkich sił w układzie, natomiast N jest funkcją sił osiowych od wszystkich sił w układzie.

W wyniku podstawień równanie przyjmie postać

$$u_0 = \int_s \frac{M \cdot M_1}{EJ} ds + \int_s \kappa_T \cdot M_1 ds + \int_s \frac{N \cdot N_1}{EF} ds + \int_s \varepsilon_T \cdot N_1 ds$$

Funkcje momentów zginających M i sił osiowych N można przedstawić w postaci

$$M = X \cdot M_1, \quad N = X \cdot N_1$$

Równanie statyki przyjmie więc postać

$$u_0 = X \left(\int_s \frac{M_1 \cdot M_1}{EJ} ds + \int_s \frac{N_1 \cdot N_1}{EF} ds \right) + \int_s \kappa_T \cdot M_1 ds + \int_s \varepsilon_T \cdot N_1 ds$$

$$u_0 = X \left(\delta_{11} + \delta_{11}^{'} \right) + \left(\delta_T + \delta_T^{'} \right)$$

gdzie $\delta_{11} = \int\limits_s \frac{M_1 M_1}{EJ} ds, \quad \delta_{11}^{'} = \int\limits_s \frac{N_1 N_1}{EF} ds, \quad \delta_T = \int\limits_s \kappa_T M_1 ds, \qquad \delta_{11}^{'} = \int\limits_s \varepsilon_T N_1 ds$

Wyrażenia $u_0, \delta_{11}, \delta_{11}^{'}, \delta_T, \delta_T^{'}$ są wzorami określającymi współczynniki występujące w klasycznym równaniu metody sił.

Wartości tych współczynników wyznaczamy korzystając z uproszczonego sposobu Mohra-Wereszczagina, który wynika wprost z obliczania wartości całki oznaczonej iloczynu dwóch funkcji przy czym jedna z tych funkcji musi być ciągła, a druga liniowa.

W wyniku przeliczeń otrzymamy

$$\delta_{11} = \frac{1}{EJ}\left(4 \cdot l \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} l\right) = \frac{4l^3}{3EJ}$$

$$\delta_{11}^{'} = \frac{1}{EF}\left(4 \cdot 1 \cdot l \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot l \cdot 2\right) = \frac{8l}{EF}$$

$$\delta_T = 1 \cdot l \cdot l \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\alpha_T (T_2 - T_1)}{h} = \frac{\alpha_T \cdot l^2 (T_2 - T_1)}{2h}$$

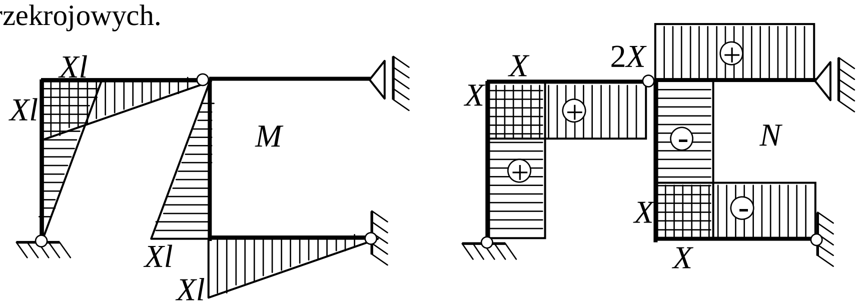
$$\delta_T^{'} = 1 \cdot l \cdot \frac{\alpha_T (T_1 + T_2)}{2} = \frac{\alpha_T \cdot l (T_1 + T_2)}{2}$$

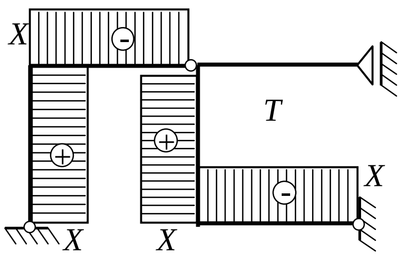
Uzyskane wyniki wstawimy do równania

$$u_0 = X\left(\frac{4l^3}{3EJ} + \frac{8l}{EF}\right) + \frac{\alpha_T l^2 (T_2 - T_1)}{2h} + \frac{\alpha_T l (T_1 + T_2)}{2}$$

$$X = \left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2 (T_2 - T_1)}{2h} - \frac{\alpha_T l (T_1 + T_2)}{2}\right] \cdot \left(\frac{4l^3}{3EJ} + \frac{8l}{EF}\right)^{-1}$$

Znajomość siły hiperstatycznej X pozwala na sporządzenie wykresów sił przekrojowych.





Rys. 3.14e

b) **Materiał nieliniowo-sprężysty**

W tym przypadku wykresy momentów M_1 i sił osiowych N_1 od siły jednostkowej $X = 1$, jak i wykresy termicznych wydłużeń i zmian krzywizn będą identyczne jak w zadaniu liniowo-sprężystym. Inną postać będą natomiast miały wydłużenia i zmiany krzywizn, które wywołane zostały przez siłę hiperstatyczną X.

Wyrażenia te będą miały postać

$$\varepsilon = \left(\frac{N}{AF}\right)^n, \quad \kappa = \left[\frac{M}{AJ(N+1)}\right]^n$$

a wynikają one z następującego równania fizycznego $\sigma = A\varepsilon^N$

Słuszny jest również warunek nierozdzielności $u_0 = \delta$

Wartość δ wyznaczamy z całki Mohra korzystając ze wzorów

$$\delta = \int_s \frac{M^n}{[AJ(N+1)]^n} M_1 ds + \int_s \frac{N^n}{(AF)^n} N_1 ds + \delta_T + \delta_T^{'}$$

gdzie $M = M_1X$; $N = N_1X$

Po podstawieniu do równania otrzymamy

$$u_0 = \int_s \frac{X^n \cdot M_1^n}{[AJ(N+1)]^n} M_1 ds + \int_s \frac{X^n \cdot N_1^n}{(AF)^n} N_1 ds + \frac{\alpha_T \cdot l^2 (T_2 - T_1)}{2h} + \frac{\alpha_T \cdot l(T_1 + T_2)}{2}$$

$$X^n = \left(\int_s \frac{M_1^n \cdot M_1}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_s \frac{N_1^n \cdot N_1}{(AF)^n} ds\right) = u_0 - \frac{\alpha_T l^2 (T_2 - T_1)}{2h} - \frac{\alpha_T l(T_1 + T_2)}{2}$$

Występujące w wyrażeniu całki wynoszą

$$\int_s \frac{M_1^n \cdot M_1}{\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n} ds = 4\int_0^l \frac{\left(1\cdot s\right)^{n+1}}{\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n} ds = 4\frac{l^{n+2}}{\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n\left(n+2\right)}$$

$$\int_s \frac{N_1^n N_1}{\left(AF\right)^n} ds = 4\int_0^l \frac{1\cdot 1^n}{\left(AF\right)^n} ds + \int_0^l \frac{2^{n+1}}{\left(AF\right)^n} ds = \frac{4l}{\left(AF\right)^n} + \frac{2^{n+1}l}{\left(AF\right)^n}$$

$$X^n = \left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} - \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right]\left(\frac{4l^{n+2}}{\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n\left(n+2\right)} + \frac{4l}{\left(AF\right)^n} + \frac{2^{n+1}l}{\left(AF\right)^n}\right)^{-1}$$

$$X = \left\{\left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} - \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right]\left(\frac{4l^{n+2}}{\left[AJ\left(N+1\right)\right]^n\left(n+2\right)} + \frac{4l}{\left(AF\right)^n} + \frac{2^{n+1}l}{\left(AF\right)^n}\right)^{-1}\right\}^N$$

Z porównania rozwiązań w zadaniu nieliniowym i liniowym istnieje możliwość dobrania takiej wartości „modułu siecznego” w zadaniu nieliniowym aby rozwiązania w obu zadaniach były identyczne.

Porównując siły X z rozwiązania liniowego i nieliniowego otrzymujemy

$$\left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} - \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right]\left(\frac{4l^3}{3EJ} + \frac{8l}{EF}\right)^{-1} =$$

$$= \left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} + \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right]^N \cdot \left(\frac{4l^{n+2}}{A^n J\left(N+1\right)^n\left(n+2\right)} + \frac{4l + 2^{n+1}l}{\left(AF\right)^n}\right)^{-N}$$

$$E\left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F}\right)^{-1}\left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} - \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right] =$$

$$= \left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} - \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right]^N \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{4l^{n+2}}{A^n J\left(N+1\right)^n\left(n+2\right)} + \frac{4l + 2^{n+1}l}{\left(AF\right)^n}\right)^{-N}$$

$$E = \left[u_0 - \frac{\alpha_T l^2\left(T_2 - T_1\right)}{2h} - \frac{\alpha_T l\left(T_1 + T_2\right)}{2}\right]^{N-1} \cdot$$

$$\cdot\left(\frac{4l^{n+2}}{A^n J\left(N+1\right)^n\left(n+2\right)} + \frac{4l + 2^{n+1}l}{\left(AF\right)^n}\right)^{-N}\left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F}\right)$$

Wynika stąd, że zastępczy „moduł sieczny” zależeć będzie nie tylko od rozkładów temperatur, ale również i od konfiguracji układu.

c) **Liniowy materiał lepkosprężysty**

$$\sigma = \int_0^t \phi(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau\phi * \dot{\varepsilon}$$

gdzie $\phi(t)$ jest funkcją relaksacji, $\dot{\varepsilon}(\tau)$ prędkością odkształceń, $*$ symbolem splotu.

Wydłużenia i krzywizny wyrażają się tutaj wzorami

$$\dot{\varepsilon} = \frac{N * \phi^{-1}}{F}, \quad \dot{\kappa} = \frac{M * \phi^{-1}}{J_{22}}$$

$$\varepsilon = \frac{\dot{N} * R}{F}, \qquad \kappa = \frac{\dot{M} * R}{J}$$

dla równania fizycznego

$$\varepsilon = \int_0^t R(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau$$

Warunek nierozdzielności pozostaje bez zmian jak w zadaniu liniowo- i nieliniowo sprężystym $u_0 = \delta$, czyli

$$u_0 = \int_s \frac{R * \dot{M}}{J} M_1 ds + \int_s \kappa_T M_1 ds + \int_s \frac{R * \dot{N}}{F} N_1 ds + \int_s \varepsilon_T N_1 ds$$

gdzie

$$\dot{M} = \dot{X} M_1, \quad \dot{N} = \dot{X} N_1$$

Po podstawieniu otrzymujemy

$$u_0 = R * \dot{X}\left(\int_s \frac{M_1 \cdot M_1}{J} ds + \int_s \frac{N_1 \cdot N_1}{F} ds \right) + \delta_T + \delta_T'$$

$$u_0 = R * \dot{X}\left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F} \right) + \frac{\alpha_T l^2 (T_2 - T_1)}{2h} + \frac{\alpha_T l (T_1 + T_2)}{2}$$

$$R * \dot{X} = \left[u_0 - \frac{\alpha_T l}{2} \left(\frac{l(T_2 - T_1)}{h} + T_1 + T_2 \right) \right] \left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F} \right)^{-1}$$

Stosując transformację Laplace'a otrzymamy

$$\overline{R}(p) \cdot p\overline{X}(p) = \frac{1}{p} \left[u_0 - \frac{\alpha_T \cdot l}{2} \left(\frac{l(T_2 - T_1)}{h} + T_1 + T_2 \right) \right] \left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F} \right)^{-1}$$

$$\overline{X}(p) = \frac{1}{p^2} \frac{1}{R(p)} \left[u_0 - \frac{\alpha_T \cdot l}{2} \left(\frac{l(T_2 - T_1)}{h} + T_1 + T_2 \right) \right] \left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F} \right)^{-1}$$

Przyjęliśmy w zadaniu stacjonarny przepływ cieplny określony równaniem $T_2(t) - T_1(t) = (\dot{T}_2 - \dot{T}_1)H(t)$, gdzie $H(t)$ jest funkcją Heaviside'a.

Wprowadzając funkcję modyfikującą $r(t)$, gdzie $\overline{r}(p) = \dfrac{1}{\overline{R}(p)}$ otrzymujemy

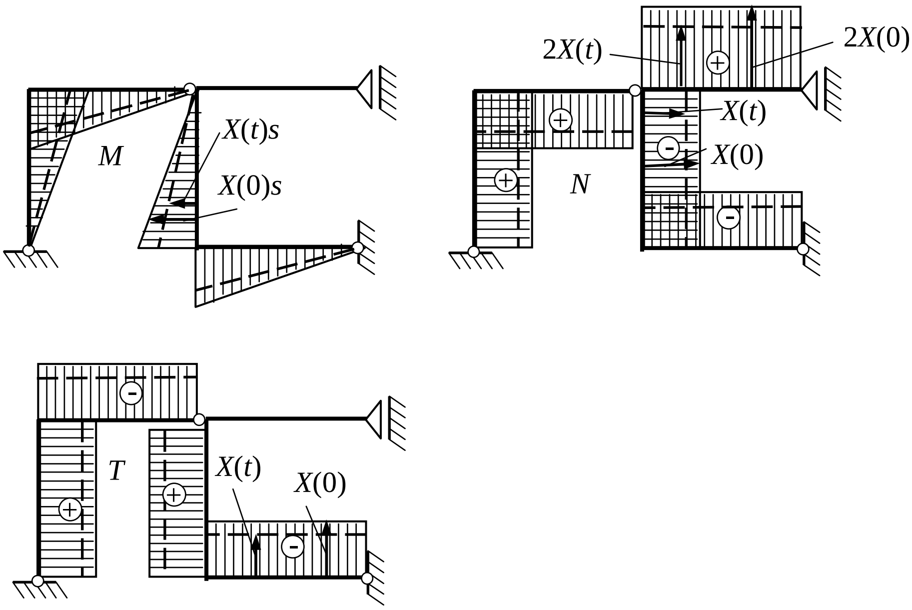
$$X(t) = t * r(t) \left[u_0 - \frac{\alpha_T l}{2} \left(\frac{l(\dot{T}_2 - \dot{T}_1)}{h} + \dot{T}_1 + \dot{T}_2 \right) \right] \left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F} \right)^{-1}$$

Funkcja $X(t)$ dla ramy żelbetowej poddanej działaniu temperatury przyjmie postać

$$X(t) = \int_0^t \tau * \frac{1}{E_b} \left\langle \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left[-\gamma (1 + E_b C_0)_e^{-\gamma(1+E_b C_0)(t-\tau)} + \right. \right. \right.$$
$$\left. \left. + \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0} \right) + \frac{1}{1+E_b C_0} \delta(t-\tau) \right] + \mu E_2 \delta(t-\tau) \right\} +$$
$$\left. + \frac{1}{1+\mu} \left\{ E_b \left(1 - \frac{1}{1+E_b C_0} \right) \right\} \delta(t-\tau) \right\rangle d\tau \left[u_0 - \frac{\alpha_T l}{2} \left(\frac{l(\dot{T}_2 - \dot{T}_1)}{h} + \dot{T}_1 + \dot{T}_2 \right) \right] \cdot$$
$$\cdot \left(\frac{4l^3}{3J} + \frac{8l}{F} \right)^{-1}$$

W podanym wzorze E_b, C_0, γ są stałymi określającymi reologiczne właściwości betonu, μ - udział zbrojenia, E_2 – moduł sprężystości stalowych wkładek. Po wykonaniu całkowania otrzymujemy zmienny w czasie rozkład sił przekrojowych wywołany stacjonarnym przepływem ciepła w ramie żelbetowej. Przyjęto przy tym, że beton opisany może być równaniami liniowej lepkosprężystości, natomiast stal posiada właściwości sprężyste.

Wykresy sił przekrojowych są analogiczne jak w zadaniu liniowo-sprężystym.



Rys. 3.14f Wykresy sił przekrojowych *M*, *N*, *T* dla ciała liniowo-lepkosprężystego

ZADANIE 3.15.

W podanym układzie prętowym (jednokrotnie statycznie niewyznaczalnym) należy wyznaczyć rozkłady funkcji momentów zginających, sił poprzecznych i sił osiowych wywołanych działaniem stacjonarnego pola temperatur. Schemat zadania oraz pole temperatur przedstawiono na rys. 3.15a.

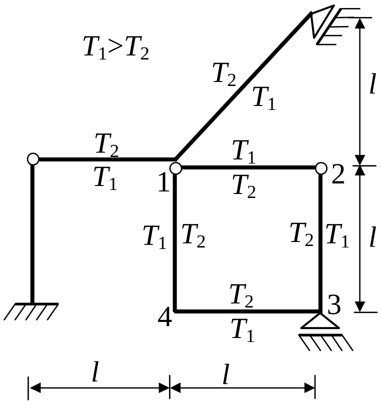
Obliczenia należy wykonać dla materiału:

a) **liniowo – sprężystego** $\sigma = E\varepsilon$

b) **nieliniowo – sprężystego** $\sigma = A\varepsilon^N$

c) **liniowo – lepkosprężystego** $\sigma = R * d\varepsilon$

Wyniki obliczeń należy ze sobą porównać.



Rys. 3.15a

Dane : l - długość, T_1,T_2 - temperatura, α_T - współczynnik rozszerzalności cieplnej, E, N, $R(t)$, A - współczynniki i funkcje charakteryzujące właściwości mechaniczne w podanym zestawie różnych materiałów.

Rozwiązanie:

W przedstawionym zadaniu siły przekrojowe i siłę hiperstatyczną wyznaczymy wykorzystując całkę Mohra, której niezmiennicza postać przyjmuje formę zależności

$$\delta = \int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds$$

gdzie δ jest przemieszczeniem w układzie wywołanym przyrostem temperatury.

Pręt 1 – 2 ulega wydłużeniu, które spowodowane jest przyrostem temperatury $\Delta T = \frac{1}{2}(T_1 + T_2)$ i wynosi $\alpha_T (T_1 + T_2)\frac{l}{2}$.

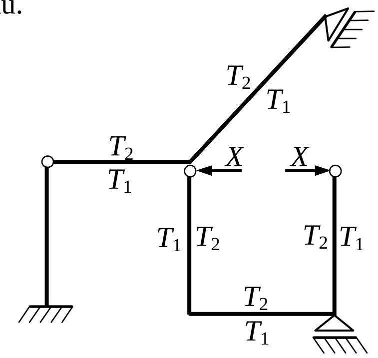
Zachodzi więc równość

$$\lambda + \alpha_T (T_1 + T_2)\frac{l}{2} = \int_s (\kappa_M + \kappa_T) M_1 ds + \int_s (\varepsilon_M + \varepsilon_T) N_1 ds$$

gdzie κ_M, κ_T są zmianami krzywizn następującymi w wyniku stanu naprężenia i przyrostu temperatur, a ε_M i ε_T są wydłużeniami wywołanymi przez pole naprężeń i średnią wartość temperatur w przekroju.

Występujące w całce Mohra funkcje M_1 i N_1 są odpowiednio momentami zginającymi i siłami osiowymi w zadanym układzie prętowym, które wynikają z działania jednostkowej siły przyłożonej w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia, czyli w punktach 1 i 2. Natomiast λ jest wydłużeniem pręta 1 – 2 spowodowanym działaniem siły osiowej w tym pręcie. Jest to wielkość nieznana i poszukiwana w zadaniu.

Przedstawione zadanie jest równoważne następującemu zadaniu statycznie wyznaczalnemu.

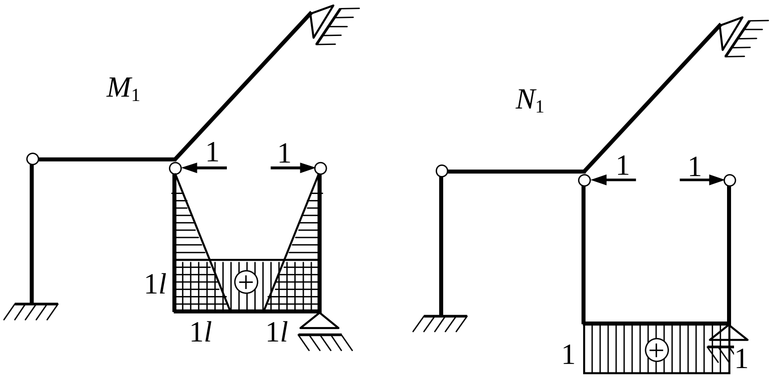


Rys. 3.15b

Siła hiperstatyczna X musi być tak dobrana, aby jej łączne działanie wraz z polem temperatury wywoływały przemieszczenie δ równe wydłużeniu λ pręta 1 – 2 od siły osiowej X i wydłużeniu termicznemu $\alpha_T(T_1 + T_2)\dfrac{l}{2}$. Musi być zatem spełniony następujący warunek nierozdzielności

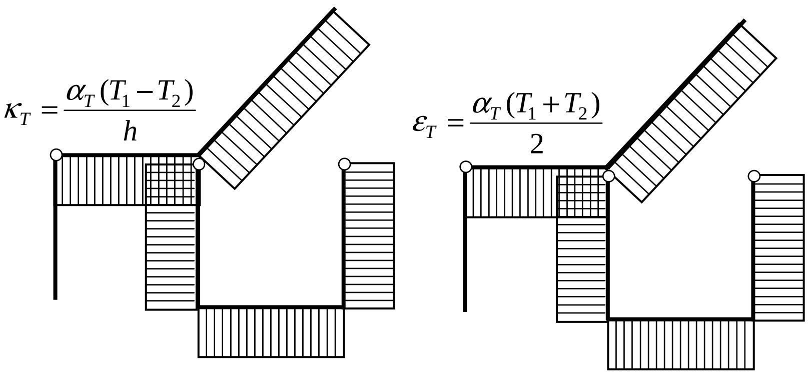
$$\lambda + \alpha_T\left(T_1 + T_2\right)\frac{l}{2} = \delta$$

W wyrażeniu tym λ i δ przyjmują różne wartości w zależności od analizowanego materiału. Niezależne od opisu materiału pozostają jednak funkcje M_1 i N_1 (momentów zginających i sił osiowych od siły jednostkowej), których wykresy mają postać



Rys. 3.15c

Wydłużenia oraz zmiany krzywizn spowodowane działaniem pola termicznego mają natomiast rozkłady:



Rys. 3.15d

gdzie *h* jest wysokością przekroju.

a) **Materiał liniowosprężysty**

Ciało liniowo-sprężyste opisane jest równaniem fizycznym $\sigma = E \cdot \varepsilon$, co prowadzi do następujących wyrażeń na krzywizny κ_M i wydłużenia ε_M w układzie

$$\kappa_M = \frac{M}{EJ}, \quad \varepsilon_M = \frac{N}{EF}$$

gdzie M jest funkcją momentów zginających wywołanych działaniem wszystkich sił w układzie, N jest funkcją sił osiowych od wszystkich sił w układzie.

W naszym zadaniu występuje tylko siła X, gdyż reakcje w podporach nie występują. Wykorzystując powyższe, możemy równanie zapisać w postaci:

$$-\frac{Xl}{EF}+\alpha_T\left(T_1+T_2\right)\frac{l}{2}=\int_s\frac{MM_1}{EJ}ds+\int_s\kappa_T M_1 ds+\int_s\frac{NN_1}{EF}ds+\int_s\varepsilon_T N_1 ds \quad (3)$$

Funkcję momentów zginających M i sił osiowych N można przedstawić jako

$$M = X\cdot M_1,\quad N = X\cdot N_1$$

a równanie statyki w sposób następujący:

$$-\frac{Xl}{EF}+\alpha_T\left(T_1+T_2\right)\frac{l}{2}=X\left(\int_s\frac{M_1M_1}{EJ}ds+\int_s\frac{N_1N_1}{EF}ds\right)+\int_s\kappa_T M_1 ds+\int_s\varepsilon_T N_1 ds$$

Wyrażenia po prawej stronie równania wyznaczymy posługując się uproszczonym sposobem Mohra – Wereszczagina, który stosujemy przy obliczaniu wartości całki oznaczonej iloczynu dwóch funkcji. Jedna z tych funkcji musi być ciągła, zaś druga liniowa.

W wyniku przeliczeń otrzymamy:

$$\delta_{11}=\frac{1}{EJ}\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\frac{2}{3}l+l\cdot l\cdot l\right)=\frac{5l^3}{3EJ}$$

$$\delta'_{11}=\frac{1}{EF}\left(1\cdot l\cdot 1\right)=\frac{l}{EF}$$

$$\delta_T=-\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot l\cdot l\cdot\alpha_T\frac{T_1-T_2}{h}+l\cdot l\cdot\alpha_T\frac{T_1-T_2}{h}\right)=-\frac{\alpha_T 2l^2}{h}\left(T_1-T_2\right)$$

$$\delta'_T=1\cdot l\cdot\frac{\alpha_T}{2}\left(T_1+T_2\right)=\frac{\alpha_T l}{2}\left(T_1+T_2\right)$$

Uzyskane wyniki wstawiamy do równania

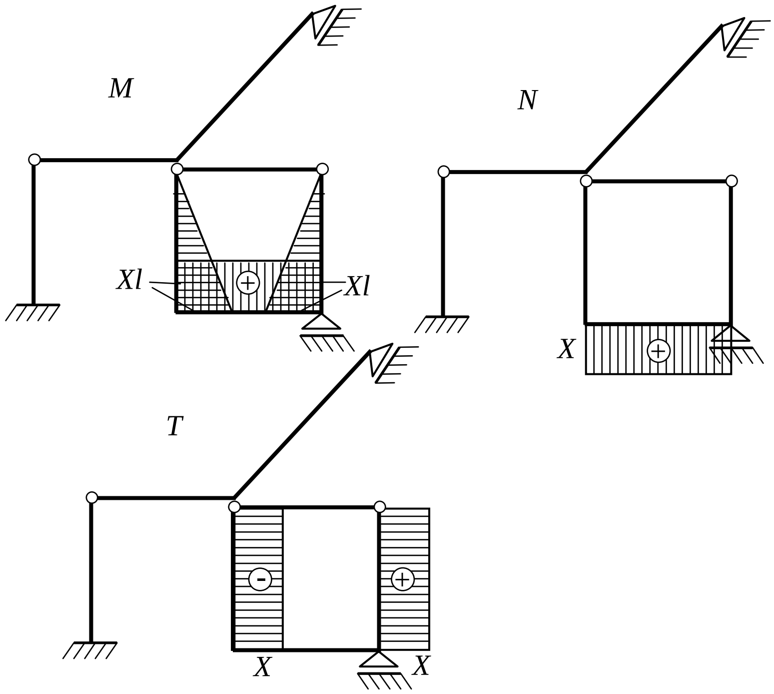
$$-\frac{Xl}{EF}+\alpha_T\left(T_1+T_2\right)\frac{l}{2}=X\left(\frac{5l^3}{3EJ}+\frac{l}{EF}\right)-\frac{\alpha_T 2l^2}{h}\left(T_1-T_2\right)+\frac{\alpha_T l}{2}\left(T_1+T_2\right)$$

$$X\left(\frac{5l^3}{3EJ}+\frac{l}{EF}+\frac{l}{EF}\right)=\frac{\alpha_T l}{2}(T_1+T_2)-\frac{\alpha_T l}{2}(T_1+T_2)+\frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1-T_2)$$

$$X=\frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1-T_2)\left(\frac{5l^3}{3EJ}+\frac{2l}{EF}\right)^{-1}$$

$$X=\frac{\alpha_T 2El^2}{h}(T_1-T_2)\left(\frac{5l^3}{3J}+\frac{2l}{F}\right)^{-1}$$

Znajomość siły hiperstatycznej X pozwala na sporządzenie wykresów sił przekrojowych



Rys. 3.15e

b) **Materiał nieliniowo-sprężysty**

Wykresy momentów M_1 i sił osiowych N_1 od siły jednostkowej $X = 1$ oraz wykresy termicznych wydłużeń i zmian krzywizn będą identyczne jak w zadaniu liniowo-sprężystym. Natomiast zmianie ulegną wydłużenia i zmiany krzywizn wywołane przez siłę hiperstatyczną X. Możemy je wyrazić przy pomocy wzorów:

$$\varepsilon = \left(\frac{N}{AF}\right)^n, \ \kappa = \left(\frac{M}{AJ(N+1)}\right)^n$$

co jest następstwem równania fizycznego postaci $\sigma = A\varepsilon^N$.

Słuszny pozostaje również warunek nierozdzielności:

$$\lambda + \alpha_T(T_1 + T_2)\frac{l}{2} = \delta$$

gdzie wartości λ i δ wyznaczymy z całki Mohra

$$\delta = \int_s \left[\frac{M}{AJ(N+1)}\right]^n M_1 ds + \int_s \left[\frac{N}{AF}\right]^n N_1 ds + \delta_T + \delta_T^{'}$$

$$\lambda = \int_0^l \left[\frac{N}{AF}\right]^n \cdot 1ds = l\left(\frac{N}{AF}\right)^n = l\left(\frac{X}{AF}\right)^n$$

Po podstawieniu powyższych zależności otrzymujemy równanie nieliniowe

$$-l\left(\frac{X}{AF}\right)^n + \alpha_T(T_1 + T_2)\frac{l}{2} = \int_s \frac{X^n M_1^n}{[AJ(N+1)]^n} M_1 ds + \int_s \frac{X^n N_1^n}{(AF)^n} N_1 ds -$$

$$-\frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2) + \frac{\alpha_T l}{2}(T_1 + T_2)$$

$$X^n\left(-\frac{l}{(AF)^n} - \int_s \frac{M_1^n M_1}{[AJ(N+1)]^N} ds - \int_s \frac{N_1^n N_1}{(AF)^n} ds\right) = -\frac{\alpha_T 2l^2}{2}(T_1 - T_2)$$

$$X^n\left(\frac{l}{(AF)^n} + 2\int_0^l \frac{1s^n s}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_0^l \frac{l^n l}{[AJ(N+1)]^n} ds + \int_0^l \frac{1^n 1}{(AF)^n} ds\right) =$$

$$= \frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2)$$

$$X^n\left(\frac{l}{(AF)^n} + 2\frac{1}{n+2}\frac{l^{n+2}}{[AJ(N+1)]^n} + \frac{l^{n+2}}{[AJ(N+1)]^n} + \frac{l}{(AF)^n}\right) = \frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2)$$

$$X^n\left(\frac{2l}{(AF)^n} + \frac{(n+4)l^{n+2}}{(n+2)[AJ(N+1)]^n}\right) = \frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2)$$

$$X = \left[\frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2)\right]^N \left[\frac{2l}{(AF)^n} + \frac{(n+4)l^{n+2}}{(n+2)[AJ(N+1)]^n}\right]^{-N}$$

Z porównania rozwiązań w zadaniu liniowym i nieliniowym istnieje możliwość dobrania takiej wartości „modułu siecznego” w zadaniu nieliniowym, aby rozwiązania w obu zadaniach były identyczne. Przyrównując siły X z rozwiązań liniowego i nieliniowego mamy

$$\frac{\alpha_T 2El(T_1 - T_2)}{h}\left(\frac{5l^2}{3J} + \frac{2}{F}\right)^{-1} = \left[\frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2)\right]^N \cdot \left[\frac{2l}{(AF)^n} + \frac{(n+4)l^{n+2}}{(n+2)[AJ(N+1)]^n}\right]^{-N}$$

$$E = \left[\frac{\alpha_T 2l^2}{h}(T_1 - T_2)\right]^N \left(\frac{5l^2}{3J} + \frac{2}{F}\right)\left(\frac{h}{\alpha_T 2l(T_1 - T_2)}\right) \cdot \left[\frac{2l}{(AF)^n} + \frac{(n+4)l^{n+2}}{(n+2)[AJ(N+1)]^n}\right]^{-N}$$

Z równania tego wynika, że zastępczy moduł sieczny zależy nie tylko od rozkładów temperatury, ale także od konfiguracji układu.

c) **Materiał lepkosprężysty**

Dla materiału lepko-sprężystego równania fizyczne mają postać

$$\sigma = \int_0^t \phi(t-\tau)\dot{\varepsilon}(\tau)d\tau = \phi * \dot{\varepsilon}$$

gdzie $\phi(t)$ jest funkcją relaksacji, $\dot{\varepsilon}(t)-$ prędkością odkształceń, $*-$ symbolem splotu.

Wydłużenia i krzywizny wyrażają się wzorami

$$\varepsilon = \frac{\dot{N} * R}{F}\ ,\ \kappa = \frac{\dot{M} * R}{J}$$

dla równania fizycznego $\varepsilon = \int_0^t R(t-\tau)\dot{\sigma}(\tau)d\tau$.

Warunek nierozdzielności pozostaje nadal bez zmian

$$\lambda + \alpha_T (T_1 + T_2)\frac{l}{2} = \delta$$